# 凸幾何に対する貪欲算法 (最適化の数理科学)



岡本, 吉央; 柏原, 賢二

数理解析研究所講究録
1174 巻 2000 年 179-191



# 凸幾何に対する貪欲算法

岡本 吉央
東京大学大学院総合文化研究科
広域科学専攻広域システム科学系
yoshio@klee.c.u-tokyo.ac.jp

柏原 賢二
東京大学大学院総合文化研究科
広域科学専攻広域システム科学系
kashiwa@graco.c.u-tokyo.ac.jp

Yoshio Okamoto
Depertment of Systems Science,
Graduate School of Arts and Sciences,
The University of Tokyo,

Kenji Kashiwabara
Depertment of Systems Science,
Graduate School of Arts and Sciences,
The University of Tokyo

## 1 イントロダクション

劣モジュラ最適化の理論は Edmonds [4] の貪欲算法に関する研究以来，様々な広がりを見せている．劣モジュラ最適化の理論の広範な解説は [7] にある．特に，Faigle-Kern [5, 6] は双対貪欲算法と半順序集合の反鎖全体の族上の劣モジュラ関数を考察した．半順序集合の反鎖全体の族上の劣モジュラ最適化問題は，Krüger [9] によって b- 劣モジュラ性によって特徴付けられることが示された．本研究では，Krüger [9] の結果を凸幾何へ拡張する．凸幾何は反交換性を満たす閉包空間であり，アンチマトロイドの双対として知られている [3, 8]．凸幾何は先行関係の抽象化，または，凸概念の組合せ論化と考えられている．アンチマトロイドに対する最適化問題の研究では，その上でのボトルネック型最適化問題に対して貪欲算法による特徴付けがなされている [2]．本研究はアンチマトロイドに対する別の最適化問題を考察することになる．

$E$ を空でない有限集合とする．$E$ の部分集合の族 $\mathcal{L}$ が $\emptyset \in \mathcal{L}$，$E \in \mathcal{L}$，かつ，任意の $X, Y \in \mathcal{L}$ に対して $X \cap Y \in \mathcal{L}$ であるとき，$\mathcal{L}$ を**閉包空間**と呼ぶ．このとき，$E$ を $\mathcal{L}$ の台集合と呼び，$\mathcal{L}$ のメンバーを**閉集合**と呼ぶ．閉包空間 $\mathcal{L}$ に付随する演算子 $\tau : 2^E \to 2^E$ を次のように定義する：$\tau(A) = \bigcap\{X \in \mathcal{L} : A \subseteq X\}$．すなわち，$\tau(A)$ は $A$ を含む最小の閉集合である．このとき，$\tau$ は次の 4 つの条件を満たす：$\tau(\emptyset) = \emptyset$，$A \subseteq \tau(A)$，$A \subseteq B$ ならば $\tau(A) \subseteq \tau(B)$，および $\tau(\tau(A)) = \tau(A)$．一般にこの 4 条件を満たす $\tau$ を**閉包作用素**と呼ぶ．逆にこの 4 条件を満たす $\tau$ を与えたとき，$\mathcal{L} = \{A \subseteq E : A = \tau(A)\}$ は閉包空間になる．

閉包空間 $\mathcal{L}$ が**凸幾何**であるとは，それが次の**反交換性**を満たすことをいう：異なる $x, y \in E$ が $x, y \notin \tau(A)$ および $y \in \tau(A \cup \{x\})$ を満たすとき，すべての $A \subseteq E$ に対して $y \notin \tau(A \cup \{y\})$ が成り立つ．凸幾何の元を**凸集合** という．

**命題 1.1.** $\mathcal{L}$ を $E$ 上の閉包空間とする．このとき，$\mathcal{L}$ が凸幾何であるとき，またそのときに限り，$X \in \mathcal{L} \setminus \{E\}$ ならば，ある $x \in E \setminus X$ が存在して $X \cup \{x\} \in \mathcal{L}$.

**証明.** [8, Chapter III, Theorem 1.3] より 容易に導かれる． □

種々の組合せ的構造から凸幾何を得ることができる．その例を幾つか挙げる．$E$ をユークリッド空間上の点の有限集合とする．このとき，$\{X \subseteq E : X = \mathrm{conv.hull}(X) \cap E\}$ は**凸シェリング**と呼ばれる凸幾何になる．2 つめの例は半順序集合から得られる．$(E, \leq)$ を半順序集合とする．$E$ の順序イデアルとは $E$ の部分集合 $X \subseteq E$ で $y \in X$ かつ $x \leq y$ ならば $x \in X$ となるようなものである．このとき，$E$ のすべての順序イデアルの族は凸幾何の公理を満たす．このような凸幾何を**半順序集合のシェリング**と呼ぶ．半順序集合のシェリングについては次の特徴付けが重要である．

**命題 1.2 ([8]).** 凸幾何が半順序集合のシェリングであるための必要十分条件は，それが合併で閉じていることである．

その他の例については，[3, 8] を見よ．

閉包演算子 $\tau$ を持つ $E$ 上の閉包空間 $\mathcal{L}$ について，$E$ の部分集合 $A \subseteq E$ の元 $a$ が $A$ の**端点**であるとは，$a \notin \tau(A \setminus \{a\})$ を満たすことである．$A$ のすべての端点の集合を $\mathrm{ex}(A)$ と書き，$A$ の**端点集合**と呼ぶ．自明に $\mathrm{ex}(A) \subseteq A$ が成立する．凸幾何 $\mathcal{L}$ に対して，$\mathrm{ex}(\mathcal{L}) = \{\mathrm{ex}(A) : A \in \mathcal{L}\}$ とする．自明に $\emptyset \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ である．

$\mathcal{L}$ が台集合を $E$ とする凸シェリングのとき，$A \subseteq E$ に対して $\mathrm{ex}(A) = \{x \in A : x$ は $\mathrm{conv.hull}(A)$ の頂点$\}$ である．また，$\mathcal{L}$ が台集合を $E$ とする半順序集合のシェリングのとき，$A \subseteq E$ に対して $\mathrm{ex}(A)$ は $A$ の極大元全体である．

凸幾何に対する重要な性質が以下のものであり，**有限 Minkowski-Krein-Milman 性**と呼ばれている：

**命題 1.3 ([3, 8]).** 閉包空間 $\mathcal{L}$ が凸幾何であるとき，またそのときに限り，すべての閉集合 $A \subseteq E$ に対して $A = \tau(\mathrm{ex}(A))$ が成立する．

凸幾何 $\mathcal{L}$ は集合の包含関係に関して束になる [3, 8]．このとき，$\mathcal{L}$ の join $\vee_{\mathcal{L}}$ と meet $\wedge_{\mathcal{L}}$ は次のように定義される：すべての $A, B \in \mathcal{L}$ に対して $A \vee_{\mathcal{L}} B = \tau(A \cup B)$，$A \wedge_{\mathcal{L}} B = A \cap B$.

有限 Minkowski-Krein-Milman 性 (命題 1.3) より，写像 $\mathrm{ex} : \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は全単射になることがわかる．演算としての $\mathrm{ex} : \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ を**端点作用素**と呼ぶ．ゆえに，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の半順序 $\preceq$ を

$$(1) \quad X \preceq Y \Leftrightarrow \tau(X) \subseteq \tau(Y) \text{ for all } X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}),$$

と定義すると，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は $\mathcal{L}$ と同型の束になる．このとき，join $\vee_{\mathrm{ex}(\mathcal{L})}$ と meet $\wedge_{\mathrm{ex}(\mathcal{L})}$ は $A \vee_{\mathrm{ex}(\mathcal{L})} B = \mathrm{ex}(\tau(A) \vee_{\mathcal{L}} \tau(B))$，$A \wedge_{\mathrm{ex}(\mathcal{L})} B = \mathrm{ex}(\tau(A) \wedge_{\mathcal{L}} \tau(B))$ となる．また，$\mathrm{ex} : \mathcal{L} \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の逆写像は閉包演算子 $\tau$ の $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ への制限であることに注意する．

混乱のない限り，$\vee_{\mathrm{ex}(\mathcal{L})}$ の代わりに $\vee$ を，$\wedge_{\mathrm{ex}(\mathcal{L})}$ の代わりに $\wedge$ を用いる．

凸幾何 $\mathcal{L}$ のすべての端点集合の族 $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の演算をもう 2 つ定義する．$X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して，**reduced meet** $X \sqcap Y$ を次のように定義する：$X \sqcap Y = (X \wedge Y) \cap (X \cup Y)$ [9]．そして，**residue** $X \diamond Y$ を $X \diamond Y = (X \cap Y) \setminus (X \vee Y)$ と定義する．$X \sqcap Y$ および $X \diamond Y$ は $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の元になることに注意する．これは後に証明する命題 2.2 より直ちに導かれる．

非負のベクトル $c \in \mathbb{R}^E_+$ と $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の関数 $f(\emptyset) = 0$ となる $f : \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ に対して，次のような $\mathcal{L}$ 上の線形計画問題 (P) を考える：

$$(2) \quad \text{Maximize} \quad \sum_{e \in E} c(e)x(e)$$

$$(3) \quad \text{subject to} \quad \sum_{e \in X} x(e) \leq f(X) \quad (X \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})).$$

この問題 (P) の双対問題 (D) は

$$(4) \quad \text{Minimize} \quad \sum_{X \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})} f(X)y(X)$$

$$(5) \quad \text{subject to} \quad \sum_{\substack{X \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \\ \text{s.t. } e \in X}} y(X) = c(e) \quad (e \in E),$$

$$(6) \quad y(X) \geq 0 \quad (X \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}))$$

である．

主問題 (P) の最適解はその双対問題 (D) の最適解に一致するので，以後は (P) の代わりに (D) を考える．

Faigle-Kern [5] は双対問題 (D) に対して Algorithm 1に示す**貪欲算法** (G) を導入した．

このアルゴリズム (G) と劣モジュラ関数に関しては次のことが知られている．

```
Input  : c ∈ ℝ_+^E
Output : y ∈ ℝ^{ex(𝓛)}   (an optimum of (D))
       : π   (a permutation of E)
Initialize:
  y(X) ← 0   (∀X ∈ ex(𝓛));
  T ← E;
  w(e) ← c(e)   (∀e ∈ E);
  π ← ∅;
Iterate:
  while T ≠ ∅ do
    determine e ∈ ex(T) s.t. w(e) = min{w(e′) : e′ ∈ ex(T)};
    y(ex(T)) ← w(e);
    π ← eπ;
    w(x) ← w(x) − w(e)   (∀x ∈ ex(T));
    T ← T \ {e}.
  end of while
```

**Algorithm 1:** 貪欲算法 (G)

**定理 1.4 (Krüger [9], Ando [1] も見よ).** $\mathcal{L}$ を半順序集合のシェリングとする．このとき，任意の $c \in \mathbb{R}_+^E$ に対して貪欲算法 (G) が (D) の最適解を与えるとき，またそのときに限り，$f : \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ は b- 劣モジュラである，すなわち，任意の $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して，$f(X) + f(Y) \geq f(X \vee Y) + f(X \sqcap Y)$.

ここで，Krüger の b- 劣モジュラ関数を c- 劣モジュラ関数と呼ばれる少し違う型の劣モジュラ関数に拡張する．$\mathcal{L}$ を凸幾何とする．このとき，関数 $f : \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ が **c- 劣モジュラ** であるとは，条件 $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee Y} + \chi^{X \sqcap Y} + \chi^{X \diamond Y}$ を満たす任意の $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して，$f(X) + f(Y) \geq f(X \vee Y) + f(X \sqcap Y) + f(X \diamond Y)$ となる関数である．ここで，$\chi^X$ は $X$ の特性ベクトルである，すなわち，

$$(7) \quad \chi^X(e) = \begin{cases} 1 & e \in X \\ 0 & e \notin X \end{cases}$$

である．

c- 劣モジュラ関数と b- 劣モジュラ関数の関係は次の定理で表されている．

**定理 1.5.** $\mathcal{L}$ を凸幾何とする．このとき，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の c- 劣モジュラ関数全体のクラスが b- 劣モジュラ関数全体のクラスに一致するとき，またそのときに限り，$\mathcal{L}$ は半順序集合のシェリングである．

この定理 1.5は後の定理 4.4 より直ちに導かれる．

Krüger [9] の定理 1.4 の拡張が以下の主定理である．

**定理 1.6.** $\mathcal{L}$ を凸幾何とする．このとき，任意の $c \in \mathbb{R}_+^E$ に対して貪欲算法 (G) が (D) の最適解を与えるとき，またそのときに限り，$f : \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ は c- 劣モジュラである．

以下，第 2 節では凸幾何の幾つかの性質を述べる．そして，第 3 節では主定理を証明する．第 4 節では 主定理からの幾つかの帰結を紹介する．

## 2　凸幾何の幾つかの性質

この節では，主定理 1.6 を証明するための凸幾何の幾つかの性質を述べる．次の命題は閉包空間の端点の特徴付けである．

**命題 2.1.** $\mathcal{L}$ を $E$ 上の閉包空間とする．$A \subseteq E$ が閉集合のとき，$a \in A$ が $A$ の端点であるための必要十分条件は $A \setminus \{a\}$ が閉集合になることである．

**証明.** 十分性は端点の定義より明らか．必要性を示す．$a$ が $A$ の端点であるとき $\tau(A \setminus \{a\}) = A \setminus \{a\}$ を証明すればよい．$\tau(A \setminus \{a\}) \supseteq A \setminus \{a\}$ は自明．$x \in \tau(A \setminus \{a\})$ を仮定する．このとき，$x \in \tau(A)$ かつ $x \neq a$ である．これらと $A$ は閉集合であることから $x \in A \setminus \{a\}$．ゆえに，$\tau(A \setminus \{a\}) \subseteq A \setminus \{a\}$．□

**命題 2.2.** 凸幾何 $\mathcal{L}$ に対して，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は hereditary である，すなわち，$A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$B \subseteq A$ ならば $B \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$．

**証明.** $A \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ とすると，端点集合の定義より任意の $a \in A$ に対して $a \notin \tau(\tau(A) \setminus \{a\})$ が成立する．ここで，$B \subseteq A$ に対して任意の $b \in B$ を考える．このとき，$b \notin \tau(\tau(B) \setminus \{b\})$ であればよい．$b \in B$ より $b \in A$ であり，$b \notin \tau(\tau(A) \setminus \{b\})$．また，$B \subseteq A$ と閉包の定義より $\tau(\tau(B) \setminus \{b\}) \subseteq \tau(\tau(A) \setminus \{b\})$ であり，ゆえに $b \notin \tau(\tau(B) \setminus \{b\})$．□

ここで，束としての $\mathcal{L}$，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の性質を幾つか紹介する．

**命題 2.3.** $\mathcal{L}$ を凸幾何，$\preceq$ を (1) で定義された $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の半順序とする．このとき，任意の $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して $X \subseteq Y$ ならば $X \preceq Y$．

**証明.** $X \subseteq Y$ とする．このとき，閉包の定義より $\tau(X) \subseteq \tau(Y)$．式 (1) より $X \preceq Y$．□

**命題 2.4.** $\mathcal{L}$ を $E$ 上の凸幾何とする．$X, Y \in \mathcal{L}$，$e \in E$ が $X = Y \setminus \{e\}$ を満たすとき，$\mathrm{ex}(Y) \setminus \{e\} \subseteq \mathrm{ex}(X)$．

**証明.** $x \in \mathrm{ex}(Y) \setminus \{e\}$ とする．このとき，$x \in X$ である．また，端点の定義より，$x \notin \tau(Y \setminus \{x\})$．ここで，$X \setminus \{x\} \subseteq Y \setminus \{x\}$ であるから，$x \notin \tau(X \setminus \{x\})$．ゆえに，$x \in \mathrm{ex}(X)$．□

**命題 2.5.** $\mathcal{L}$ を凸幾何，$\preceq$ を (1) で定義された $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の半順序とする．また，$X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$Y \preceq X$ とする．このとき，$e \in X$ かつ $e \in \tau(Y)$ ならば $e \in Y$．

**証明.** 命題 2.1 より $\tau(X) \setminus \{e\}$ は凸集合．よって，閉集合の定義より $(\tau(X) \setminus \{e\}) \cap \tau(Y)$ は凸集合．また，$Y \preceq X$ より $\tau(Y) \subseteq \tau(X)$．ゆえに，$(\tau(X) \setminus \{e\}) \cap \tau(Y) = \tau(Y) \setminus \{e\}$．命題 2.1より，$e \in Y$ である．□

**命題 2.6.** $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ ならば，$X \diamond Y \subseteq X \cap Y \subseteq X \sqcap Y$．

**証明.** $X \diamond Y \subseteq X \cap Y$ は定義より自明．$e \in X \cap Y$ とする．このとき，$e \in X$ かつ $e \in Y$ であるから，$e \in \tau(X)$ かつ $e \in \tau(Y)$ が成立する．よって，$e \in \tau(X) \cap \tau(Y)$ であり，命題 2.5から $e \in \mathrm{ex}(\tau(X) \cap \tau(Y))$，すなわち，$e \in X \wedge Y$ である．また，$e \in X \cup Y$ も成立するので，$X \cap Y \subseteq X \sqcap Y$．□

この命題 2.6 と命題 2.3 より次の定理が導かれる．

**命題 2.7.** $\mathcal{L}$ を凸幾何，$\preceq$ を (1) で定義された $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の半順序とする．このとき，任意の $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して $X \diamond Y \preceq X \sqcap Y \preceq X \vee Y$．

次は residue を用いた半順序集合のシェリングの特徴付けである．

**命題 2.8.** $E$ を台集合とする凸幾何 $\mathcal{L}$ が半順序集合のシェリングであるとき，またそのときに限り，任意の $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して $X \diamond Y = \emptyset$.

**証明.** $\mathcal{L}$ を半順序集合のシェリングでないとする．このとき，命題 1.2 よりある $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が存在して，$\tau(X) \cup \tau(Y) \subsetneq \tau(\tau(X) \cup \tau(Y)) = \tau(X \vee Y)$．すなわち，ある $a \in E$ が存在して $a \in \tau(X \vee Y) \setminus (\tau(X) \cup \tau(Y))$．ここで，$A = \mathrm{ex}(\tau(X) \cup \{a\})$，$B = \mathrm{ex}(\tau(Y) \cup \{a\})$ とおいて $A \diamond B \neq \emptyset$ を示す．$a \in \tau(X \vee Y) \setminus (\tau(X) \cup \tau(Y))$ より $a \notin \tau(X) = \tau(\tau(X)) = \tau((\tau(X) \cup \{a\}) \setminus \{a\})$．よって，$a$ は $\tau(X) \cup \{a\}$ の端点であり，$a \in \mathrm{ex}(\tau(X) \cup \{a\}) = A$．同様に，$a \in B$ が示され，$a \in A \cap B$ であることがわかる．また，$a \in X \vee Y$ を仮定する．このとき，$\tau(X \vee Y) \setminus \{a\} \in \mathcal{L}$．また，$a \notin \tau(X)$ より，$\tau(X) = \tau(X) \setminus \{a\} \subseteq \tau(X \vee Y) \setminus \{a\}$．同様に，$\tau(Y) \subseteq \tau(X \vee Y) \setminus \{a\}$．ゆえに，$X \vee Y$ の最小性に矛盾．よって，$a \notin X \vee Y$．ここで，$\tau(A) = \tau(\mathrm{ex}(\tau(X) \cup \{a\})) \subseteq \tau(\tau(X) \cup \{a\}) \subseteq \tau(\tau(X) \cup \tau(Y) \cup \{a\}) = \tau(\tau(X) \cup \tau(Y)) = \tau(X \vee Y)$ であるから，$A \preceq X \vee Y$．同様に，$B \preceq X \vee Y$．また，$\tau(X) \subseteq \tau(\tau(X) \cup \{a\}) = \tau(A)$ より $X \preceq A$．同様に，$Y \preceq B$．ゆえに，$X \vee Y = A \vee B$．よって，$a \notin A \vee B$．従って，$a \in (A \cap B) \setminus (A \vee B) = A \diamond B$．
逆に，ある $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して $X \diamond Y \neq \emptyset$ であるとする．すなわち，ある $a \in E$ が存在して $a \in X$，$a \in Y$ かつ $a \notin X \vee Y$．命題 2.1 より，$\tau(X) \setminus \{a\} \in \mathcal{L}$ かつ $\tau(Y) \setminus \{a\} \in \mathcal{L}$．ここで，$\mathcal{L}$ を半順序集合のシェリングであるとする．このとき，命題 1.2 より $(\tau(X) \setminus \{a\}) \cup (\tau(Y) \setminus \{a\}) \in \mathcal{L}$ が成立し，ゆえに，$(\tau(X) \cup \tau(Y)) \setminus \{a\} \in \mathcal{L}$．ここで，命題 1.2 および $\tau(X \vee Y) = \tau(X) \cup \tau(Y) \in \mathcal{L}$ より $a \in X \vee Y$ となり，矛盾．□

凸幾何の作る束は lower セミモジュラ束というクラスに属する [3]．ゆえに，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の任意の極大鎖 $\mathcal{C}$ の長さはすべて等しく，その長さは $|E|$ である．

**命題 2.9.** $\mathcal{L}$ を $E$ 上の凸幾何とする．このとき，$|E| = n$ として，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の任意の極大鎖 $\mathcal{C}$ を $\mathcal{C} : \emptyset \prec X_1 \prec X_2 \prec X_3 \prec \ldots \prec X_{n-1} \prec X_n = \mathrm{ex}(E)$ とすると，任意の $a \in E$ に対して $l \leq m$ を満たす自然数 $l, m$ が存在して，

(8) $1 \leq i < l \Leftrightarrow a \notin \tau(X_i)$

(9) $l \leq i \leq m \Leftrightarrow a \in X_i$

(10) $m < i \leq n \Leftrightarrow a \notin X_i\ , a \in \tau(X_i)$.

**証明.** $\mathcal{L}$ と $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の同型性と，命題 1.1，命題 2.5 および 命題 2.3 より導かれる．□

$\mathcal{L}$ を $E$ 上の凸幾何とすると，上の命題 2.9より，$a \in E$ に対して $Z \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は次の 3 つのいずれかを満たすことがわかる：

(11) $a \notin Z, a \in \tau(Z)$　すなわち $a$ は $\tau(Z)$ の内側にある (in);

(12) $a \in Z$　すなわち $a$ は $\tau(Z)$ の端点である (ex);

(13) $a \notin \tau(Z)$　すなわち $a$ は $\tau(Z)$ の外側にある (out).

よって，$a \in E$ と $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して，$X, Y, X \vee Y, X \wedge Y$ は，表 1 で表された $\mathfrak{A}$ から $\mathfrak{J}$ の場合しかとらないことがわかる．例えば，$\mathfrak{A}$，$\mathfrak{B}$ が示していることは，$a \in E$ が $\tau(X)$ と $\tau(Y)$ の内側にあるとき，$a$ が $\tau(X \vee Y)$ の端点であったり，外側にあるということはないことである．

この表 1において次の点に注意する．

**注意 2.10.** $\mathfrak{B}$ のとき，またそのときに限り，$a \in (X \wedge Y) \setminus (X \sqcap Y)$.

**注意 2.11.** $\mathfrak{E}$ のとき，またそのときに限り，$a \in X \diamond Y$.

**注意 2.12.** $\mathfrak{G}$ のとき，またそのときに限り，$\chi^X(a) + \chi^Y(a) > \chi^{X \vee Y}(a) + \chi^{X \sqcap Y}(a) + \chi^{X \diamond Y}(a)$．その他の場合は，$\chi^X(a) + \chi^Y(a) = \chi^{X \vee Y}(a) + \chi^{X \sqcap Y}(a) + \chi^{X \diamond Y}(a)$ が成立する．

| | $\mathfrak{A}$ | $\mathfrak{B}$ | $\mathfrak{C}$ | $\mathfrak{D}$ | $\mathfrak{E}$ | $\mathfrak{F}$ | $\mathfrak{G}$ | $\mathfrak{H}$ | $\mathfrak{I}$ | $\mathfrak{J}$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $X$ | in | in | in | in | ex | ex | ex | ex | out | out |
| $Y$ | in | in | ex | out | ex | ex | out | out | out | out |
| $X \vee Y$ | in | in | in | in | in | ex | in | ex | in | out |
| $X \wedge Y$ | in | ex | ex | out | ex | ex | out | out | out | out |

表 1: 場合分け

## 3 Main 定理 1.6の証明

まず，貪欲算法 (G) について幾つか注意する点を列挙する．

**注意 3.1.** (G) を実行中はすべての $e \in E$ に対して常に $w(e) \geq 0$ が成立している．従って，第 9 行目で定められる $y(\mathrm{ex}(T))$ は常に非負である．

**証明.** すべての $e \in E$ に対して $c(e) \geq 0$ であるから，`Initialize` の時点ではすべての $e \in E$ に対して $w(e) \geq 0$ である．$w(e)$ が負になる可能性が出て来るのは，(G) における第 11 行目だけである．しかし，第 8 行目における $e$ の選び方より，すべての $x \in \mathrm{ex}(T)$ について $w(x) \geq w(e)$ が成立するため実際は負になるようなことはない． □

**注意 3.2.** (G) の `Iteration` で繰り返しが行なわれている間は $\mathrm{ex}(T) \neq \emptyset$ である．

**証明.** 凸幾何 $\mathcal{L}$ とその端点集合族 $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は束同型であり，$\mathrm{ex}(\emptyset) = \emptyset$ であるから，空でない任意の $X \in \mathcal{L}$ に対して $\mathrm{ex}(X) \neq \emptyset$ である．また，`Iteration` は $T \neq \emptyset$ である限り続くことから，(G) の `Iteration` で繰り返しが行なわれている間は $\mathrm{ex}(T) \neq \emptyset$ であることがわかる． □

**注意 3.3.** (G) の第 8 行目で $w(e')$ が最小になるような $e' \in \mathrm{ex}(T)$ が複数あるとき，そのどちらを $e$ として選んだとしても，最終的に得られる $y$ は変わらない．

**証明.** $k$ 回目の `Iteration` のときの $T$，$w$ をそれぞれ $T^{(k)}$，$w^{(k)}$ と書くことにする．$k$ 回目の `Iteration` のときに第 8 行目で選ばれる元の候補が 2 つある場合を考える．候補が 3 つ以上の場合は 2 つの場合拡張することで容易に導くことができる．

その 2 つの元を $e_1, e_2 \in \mathrm{ex}(T^{(k)})$ とする．すなわち，$w^{(k)}(e_1) = w^{(k)}(e_2)$ であり，$e_1, e_2$ 以外の任意の $e \in \mathrm{ex}(T^{(k)})$ に対して $w^{(k)}(e_1) < w^{(k)}(e), w^{(k)}(e_2) < w^{(k)}(e)$ である．ここで，$e_1$ が選ばれたとすると，$y(\mathrm{ex}(T^{(k)})) = e_1$ である．次の `Iteration` の段階では $w^{(k+1)}(e_2) = 0$ であり，命題 2.9 より $e_2 \in \mathrm{ex}(T^{(k+1)})$ であることがわかる．$e_2$ 以外の任意の $e \in \mathrm{ex}(T^{(k+1)})$ に対して $w^{(k+1)}(e_2) < w^{(k+1)}(e)$ であるから，この段階の第 8 行目で選ばれる元は $e_2$ であり，このとき，$y(\mathrm{ex}(T^{(k+1)})) = 0$ である．そして，$T^{(k+2)} = T^{(k)} \setminus \{e_1, e_2\}$ である．

次にはじめに $e_2$ が選ばれた場合を先と同様に考えると，$y(\mathrm{ex}(T^{(k)})) = e_2$，$y(\mathrm{ex}(T^{(k+1)})) = 0$，$T^{(k+2)} = T^{(k)} \setminus \{e_1, e_2\}$ となるが，$e_1 = e_2$ であるので，結局得られる $y$ は変わらないことがわかる． □

以下，主定理 1.6の証明のために幾つかの補題を用意する．

**補題 3.4.** $n = |E|$ とする．アルゴリズム (G) で得られた $E$ の要素の列 $\pi = e_1 e_2 \cdots e_n$ は次の条件を満たす：$e_i \in \tau(\{e_1, \ldots, e_j\})$ ならば $i \leq j$．すなわち，$\{e_1, \ldots, e_j\}$ は凸集合である．

**証明.** 対偶を考える．

$i > j$ と仮定する．$\{e_1, \ldots, e_j\} \subseteq \{e_1, \ldots, e_{i-1}\}$ と $\tau$ の単調性より，$\tau(\{e_1, \ldots, e_j\}) \subseteq \tau(\{e_1, \ldots, e_{i-1}\})$．また，$e_i \in \mathrm{ex}(\{e_1, \ldots, e_i\})$ である．なぜなら，(G) において $T = \{e_1, \ldots, e_i\}$ のときに 8 行目で $e$ とし

て選ばれるのが $e_i$ であるから．ここで，$e_i \notin \tau(\{e_1,\ldots,e_{i-1}\})$ である．よって，$e_i \notin \tau(\{e_1,\ldots,e_j\})$ である． □

補題 3.4 により，$\pi$ に対して $A_i^\pi = \mathrm{ex}(\{e_1,e_2,\ldots,e_i\})$ を考え，$x^\pi$ を線形方程式

$$(14)\quad \sum_{e\in A_i^\pi} x^\pi(e) = f(A_i^\pi) \quad (i=1,\ldots,n)$$

の一意解とする．$x^\pi$ を **greedy vector** と呼ぶ．ここで，任意の $i<j$ に対して $A_i^\pi \prec A_j^\pi$ が成立し，$\mathcal{C}$ : $\emptyset \prec A_1^\pi \prec A_2^\pi \prec \cdots \prec A_n^\pi$ は $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の極大鎖になることに注意する．$\mathcal{C}$ を **greedy chain** と呼ぶ．

**補題 3.5.** 各 $i\in\{1,\ldots,n\}$ に対してある $l\in\{i,\ldots,n\}$ が存在して，上で定義された $A_j^\pi$ が $e_i\in A_j^\pi$ を満たすとき，またそのときに限り，$j\in\{i,\ldots,l\}$.

**証明.** 命題 2.9より. □

**補題 3.6.** (G) で得られた $y\in\mathbb{R}_+^{\mathrm{ex}(\mathcal{L})}$ は次の方程式の一意解 $y^\pi$ に一致する.

$$(15)\quad \sum_{\substack{A\in\{A_1^\pi,\ldots,A_n^\pi\}\\ \text{s.t. } e_i\in A}} y^\pi(A) = c(e_i) \quad (i\in\{1,\ldots,n\})$$

$$(16)\quad y^\pi(A)=0 \quad (A\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})\setminus\{A_1^\pi,\ldots,A_n^\pi\})$$

$y^\pi$ を **dual greedy vector** と呼ぶ。

**証明.** 任意の $A\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})\setminus\{A_1^\pi,\ldots,A_n^\pi\}$ に対して，$y^\pi(A)=0$ が成立するのは自明．また，$i\in\{1,\ldots,n\}$ に対して補題 3.5 より

$$(17)\quad \sum_{\substack{A\in\{A_1^\pi,\ldots,A_n^\pi\}\\ \text{s.t. } e_i\in A}} y^\pi(A) = \sum_{i\le j\le l} y^\pi(A_j^\pi) = \sum_{i\le j\le l} w(e_j) = c(e_i).$$

一意性は方程式の形よりわかる． □

**補題 3.7.** この $x^\pi$ と $y^\pi$ は次の**相補スラック性**を満足する：任意の $A\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して，$y^\pi(A)>0$ ならば $\sum\{x^\pi(e): e\in A\} = f(A)$.

**証明.** $A\in\{A_1^\pi,\ldots,A_n^\pi\}$ であるから greedy vector の定義から成立. □

次に greedy vector $x^\pi$ と dual greedy vector $y^\pi$ の実行可能性を示す.

**補題 3.8.** Dual greedy vector $y^\pi$ は (D) の実行可能解である.

**証明.** $y^\pi\ge 0$ は自明．$\sum\{y^\pi(X): X\in\mathcal{L} \text{ s.t. } e\in X\} = c(e)$ については補題 3.6より. □

$E$ 上の凸幾何 $\mathcal{L}$ に対して，$\mathrm{atom}(\mathcal{L}) = \{e\in E : \{e\}\in\mathcal{L}\}$ と定義する．任意の凸幾何 $\mathcal{L}$ に対して，$\mathrm{atom}(\mathcal{L}) = \mathrm{atom}(\mathrm{ex}(\mathcal{L}))$ であることが直ちにわかる.

凸幾何 $\mathcal{L}$ と $A\in\mathcal{L}$ に対して，$\mathcal{L}$ の $A$ による**縮約** $\mathcal{L}/A$ を次のように定義する：$\mathcal{L}/A = \{X\setminus A : X\in\mathcal{L}, A\subseteq X\}$．また，凸幾何 $\mathcal{L}$ と $E\setminus A\in\mathcal{L}$ に対して，$A$ の**除去** $\mathcal{L}\setminus A$ を次のように定義する：$\mathcal{L}\setminus A = \{X\in\mathcal{L} : X\subseteq E\setminus A\}$．凸幾何の縮約・除去もまた凸幾何であることに注意する.

$|E|>1$ のとき，$e\in\mathrm{atom}(\mathcal{L})$ に対して，$f':\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})\to\mathbb{R}$ を

$$(18)\quad f'(X) = \begin{cases} f(X\cup\{e\}) - f(\{e\}) & X\cup\{e\}\in\mathrm{ex}(\mathcal{L}) \\ f(X) & X\cup\{e\}\notin\mathrm{ex}(\mathcal{L}) \end{cases}$$

と定義する.

**補題 3.9.** $e \in \mathrm{atom}(\mathcal{L})$, $f : \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ を c- 劣モジュラとする．このとき，任意の $X \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ に対して，$f'(X) \leq f(X)$.

**証明.** $X \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき，$f'$ の定義より $f'(X) = f(X)$.

$X \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき，$f$ の c- 劣モジュラ性および $e \notin X$ より $f(X) + f(\{e\}) \geq f(X \cup \{e\})$ であるから，$f'(X) = f(X \cup \{e\}) - f(\{e\}) \leq f(X)$. □

**補題 3.10.** 凸幾何 $\mathcal{L}$ に対して $e \in \mathrm{atom}(\mathcal{L})$, $X \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ とする．このとき，$X \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ であるとき，またそのときに限り，$e \notin \tau(X)$ である．ただし，$\tau$ は $\mathcal{L}$ 上の閉包演算子である．

**証明.** 端点の定義より容易に導ける． □

ここで，$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ と $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の関係を考える．$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ 上の閉包演算子，端点演算子をそれぞれ，$\tau'$, $\mathrm{ex}'$ とし，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ 上の演算と区別する．$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ から $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ への写像 $\iota : \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\}) \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ を次のように定義する：任意の $X \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ に対して，$\iota(X) = \mathrm{ex}(\tau'(X) \cup \{e\})$. このとき，補題 3.10 より，

$$(19) \quad \iota(X) = \begin{cases} X \cup \{e\} & (X \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})), \\ X & (X \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})) \end{cases}$$

である．

$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ 上の join, meet, reduced meet および residue はそれぞれ $\vee'$, $\wedge'$, $\sqcap'$, $\diamond'$ と書くと，このとき，

$$(20) \quad \iota(X \vee' Y) \ = \ \iota(X) \vee \iota(Y),$$
$$(21) \quad \iota(X \wedge' Y) \ = \ \iota(X) \wedge \iota(Y)$$

が成り立ち，ゆえに，$\iota : \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\}) \to \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ は束の埋め込みになっている．

**補題 3.11.** $|E| > 1$, $e \in \mathrm{atom}(\mathcal{L})$ とする．$f : \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \to \mathbb{R}$ が c- 劣モジュラ関数のとき，上で定義された $f' : \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\}) \to \mathbb{R}$ も c- 劣モジュラ関数である．

**証明.** 任意の $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ に対して，$e \in \tau(\iota(X)), \tau(\iota(Y))$ であるから，$X \cup \{e\}$, $Y \cup \{e\}$, $(X \vee' Y) \cup \{e\}$, $(X \wedge' Y) \cup \{e\}$ に関して，表 1 における $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \mathfrak{E}, \mathfrak{F}$ の場合を考えればよい．

$\mathfrak{A}$ のとき，すなわち，$X \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$, $Y \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$, $(X \vee' Y) \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$, $(X \wedge' Y) \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき．式 (19) より，$\iota(X) = X$, $\iota(Y) = Y$, $\iota(X \vee' Y) = X \vee' Y$, $\iota(X \wedge' Y) = X \wedge' Y$. また，式 (20) より，$\iota(X \vee' Y) = \iota(X) \vee \iota(Y) = X \vee Y$. 同様に，式 (21) より，$\iota(X \wedge' Y) = \iota(X) \wedge \iota(Y) = X \wedge Y$. よって，$X \sqcap' Y = X \sqcap Y$, $X \diamond' Y = X \diamond Y$. ゆえに，$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ において $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee' Y} + \chi^{X \sqcap' Y} + \chi^{X \diamond' Y}$ が成立するとき，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ において $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee Y} + \chi^{X \sqcap Y} + \chi^{X \diamond Y}$ が成立し，補題 3.9 より，

$$\begin{aligned} f'(X) + f'(Y) &= f(X) + f(Y) \\ &\geq f(X \vee Y) + f(X \sqcap Y) + f(X \diamond Y) \\ &\geq f'(X \vee Y) + f'(X \sqcap Y) + f'(X \diamond Y) \\ &= f'(X \vee' Y) + f'(X \sqcap' Y) + f'(X \diamond' Y). \end{aligned}$$

$\mathfrak{B}$ のとき，すなわち，$X \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$, $Y \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$, $(X \vee' Y) \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$, $(X \wedge' Y) \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき．式 (19) より，$\iota(X) = X$, $\iota(Y) = Y$, $\iota(X \vee' Y) = X \vee' Y$, $\iota(X \wedge' Y) = (X \wedge' Y) \cup \{e\}$. また，式 (20) より，$\iota(X \vee' Y) = \iota(X) \vee \iota(Y) = X \vee Y$. 同様に，式 (21) より，$\iota(X \wedge' Y) = \iota(X) \wedge \iota(Y) =$

$X \wedge Y$．よって，$X \diamond' Y = X \diamond Y$．また，$e \notin X \cup Y$ であるので，

$$\begin{aligned} X \sqcap Y &= (X \wedge Y) \cap (X \cup Y) \\ &= \iota(X \wedge' Y) \cap (X \cup Y) \\ &= ((X \wedge' Y) \cup \{e\}) \cap (X \cup Y) \\ &= (X \wedge' Y) \cap (X \cup Y) \\ &= X \sqcap' Y. \end{aligned}$$

ゆえに，$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ において $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee' Y} + \chi^{X \sqcap' Y} + \chi^{X \diamond' Y}$ が成立するとき，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ において $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee Y} + \chi^{X \sqcap Y} + \chi^{X \diamond Y}$ が成立し，補題 3.9 より，

$$\begin{aligned} f'(X) + f'(Y) &= f(X) + f(Y) \\ &\geq f(X \vee Y) + f(X \sqcap Y) + f(X \diamond Y) \\ &\geq f'(X \vee Y) + f'(X \sqcap Y) + f'(X \diamond Y) \\ &= f'(X \vee' Y) + f'(X \sqcap' Y) + f'(X \diamond' Y). \end{aligned}$$

$\mathfrak{C}$ のとき，すなわち，$X \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$Y \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$(X \vee' Y) \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$(X \wedge' Y) \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき．式 (19) より，$\iota(X) = X$，$\iota(Y) = Y \cup \{e\}$，$\iota(X \vee' Y) = X \vee' Y$，$\iota(X \wedge' Y) = (X \wedge' Y) \cup \{e\}$．また，式 (20) より，$\iota(X \vee' Y) = \iota(X) \vee \iota(Y) = X \vee (Y \cup \{e\})$．同様に，式 (21) より，$\iota(X \wedge' Y) = \iota(X) \wedge \iota(Y) = X \wedge (Y \cup \{e\})$．よって，$X \vee' Y = X \vee (Y \cup \{e\})$，$(X \wedge' Y) \cup \{e\} = X \wedge (Y \cup \{e\})$．ここで，$Y \subseteq Y \cup \{e\}$ であるから 命題2.3より $Y \preceq Y \cup \{e\}$．$Y \cup \{e\} \subseteq \tau(Y) \cup \{e\} \subseteq \tau(X) \cup \tau(Y) \subseteq \tau(\tau(X) \cup \tau(Y)) = \tau(X \vee Y)$ より $\tau(Y \cup \{e\}) \subseteq \tau(X \vee Y)$．よって，$Y \cup \{e\} \preceq X \vee Y$．ゆえに，$X \vee Y = X \vee (Y \cup \{e\}) = X \vee' Y$ となり，$X \diamond (Y \cup \{e\}) = X \diamond Y = X \diamond' Y$ も成立する．また，

$$\begin{aligned} (X \sqcap' Y) \cup \{e\} &= ((X \wedge' Y) \cap (X \cup Y)) \cup \{e\} \\ &= ((X \wedge' Y) \cup \{e\}) \cup ((X \cup Y) \cap \{e\}) \\ &= (X \wedge (Y \cup \{e\})) \cap (X \cup (Y \cap \{e\})) \\ &= X \sqcap (Y \cup \{e\}) \end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ において $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee' Y} + \chi^{X \sqcap' Y} + \chi^{X \diamond' Y}$ が成立するとき，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ において $\chi^X + \chi^{Y \cup \{e\}} = \chi^{X \vee (Y \cup \{e\})} + \chi^{X \sqcap (Y \cup \{e\})} + \chi^{X \diamond (Y \cup \{e\})}$ が成立し，補題 3.9 より，

$$\begin{aligned} f'(X) + f'(Y) &= f(X) + f(Y \cup \{e\}) - f(\{e\}) \\ &\geq f(X \vee (Y \cup \{e\}) + f(X \sqcap (Y \cup \{e\})) + f(X \diamond (Y \cup \{e\})) - f(\{e\}) \\ &= f(X \vee' Y) + f((X \sqcap' Y) \cup \{e\}) + f(X \diamond' Y) - f(\{e\}) \\ &\geq f'(X \vee' Y) + f'(X \sqcap' Y) + f'(X \diamond' Y). \end{aligned}$$

$\mathfrak{E}$ のとき．すなわち，$X \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$Y \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$(X \vee' Y) \cup \{e\} \notin \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$(X \wedge' Y) \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき．式 (19) より，$\iota(X) = X \cup \{e\}$，$\iota(Y) = Y \cup \{e\}$，$\iota(X \vee' Y) = X \vee' Y$，$\iota(X \wedge' Y) = (X \wedge' Y) \cup \{e\}$．また，式 (20) より，$\iota(X \vee' Y) = \iota(X) \vee \iota(Y) = (X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})$．同様に，式 (21) より，$\iota(X \wedge' Y) = \iota(X) \wedge \iota(Y) = (X \cup \{e\}) \wedge (Y \cup \{e\})$．よって，$X \vee' Y = (X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})$，$(X \wedge' Y) \cup \{e\} = (X \cup \{e\}) \wedge (Y \cup \{e\})$．ここで，$\mathfrak{C}$ の場合と同様に，$X \preceq X \cup \{e\} \preceq X \vee Y$，$Y \preceq$

$Y \cup \{e\} \preceq X \vee Y$ であるので，$X \vee Y = (X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\}) = X \vee' Y$ となる．また，

$$\begin{aligned}
(X \sqcap' Y) \cup \{e\} &= ((X \wedge' Y) \cap (X \cup Y)) \cup \{e\} \\
&= ((X \wedge' Y) \cup \{e\}) \cup ((X \cup Y) \cap \{e\}) \\
&= ((X \cup \{e\}) \wedge (Y \cup \{e\})) \cap ((X \cup \{e\}) \cup (Y \cap \{e\})) \\
&= (X \cup \{e\}) \sqcap (Y \cup \{e\}), \\
(X \diamond' Y) \cup \{e\} &= ((X \cap Y) \setminus (X \vee' Y)) \cup \{e\} \\
&= ((X \cap Y) \setminus (X \vee Y)) \cup \{e\} \\
&= ((X \cap Y) \cup \{e\}) \setminus (X \vee Y) \\
&= ((X \cup \{e\}) \cap (Y \cup \{e\})) \setminus ((X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})) \\
&= (X \cup \{e\}) \diamond (Y \cup \{e\}).
\end{aligned}$$

であるから，$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ において $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee' Y} + \chi^{X \sqcap' Y} + \chi^{X \diamond' Y}$ が成立するとき，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ において $\chi^{X \cup \{e\}} + \chi^{Y \cup \{e\}} = \chi^{(X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})} + \chi^{(X \cup \{e\}) \sqcap (Y \cup \{e\})} + \chi^{(X \cup \{e\}) \diamond (Y \cup \{e\})}$ が成立し，補題 3.9 より，

$$\begin{aligned}
f'(X) + f'(Y) &= f(X \cup \{e\}) + f(Y \cup \{e\}) - 2f(\{e\}) \\
&\geq f((X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\}) + f((X \cup \{e\}) \sqcap (Y \cup \{e\})) \\
&\quad + f((X \cup \{e\}) \diamond (Y \cup \{e\})) - 2f(\{e\}) \\
&= f(X \vee' Y) + f((X \sqcap' Y) \cup \{e\}) + f((X \diamond' Y) \cup \{e\}) - 2f(\{e\}) \\
&\geq f'(X \vee' Y) + f(X \sqcap' Y) + f(X \diamond' Y).
\end{aligned}$$

$\mathfrak{F}$ のとき．すなわち，$X \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$Y \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$(X \vee' Y) \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$，$(X \wedge' Y) \cup \{e\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき．式 (19) より，$\iota(X) = X \cup \{e\}$，$\iota(Y) = Y \cup \{e\}$，$\iota(X \vee' Y) = (X \vee' Y) \cup \{e\}$，$\iota(X \wedge' Y) = (X \wedge' Y) \cup \{e\}$．また，式 (20) より，$\iota(X \vee' Y) = \iota(X) \vee \iota(Y) = (X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})$．同様に，式 (21) より，$\iota(X \wedge' Y) = \iota(X) \wedge \iota(Y) = (X \cup \{e\}) \wedge (Y \cup \{e\})$．よって，$(X \vee' Y) \cup \{e\} = (X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})$，$(X \wedge' Y) \cup \{e\} = (X \cup \{e\}) \wedge (Y \cup \{e\})$．ここで，$\mathfrak{E}$ の場合と同様にして，$(X \vee Y) \cup \{e\} = (X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\}) = (X \vee' Y) \cup \{e\}$，$(X \cup \{e\}) \sqcap (Y \cup \{e\}) = (X \sqcap' Y) \cup \{e\}$，$(X \cup \{e\}) \diamond (Y \cup \{e\}) = X \diamond' Y$．ゆえに，$\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e\})$ において $\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee' Y} + \chi^{X \sqcap' Y} + \chi^{X \diamond' Y}$ が成立するとき，$\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ において $\chi^{X \cup \{e\}} + \chi^{Y \cup \{e\}} = \chi^{(X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})} + \chi^{(X \cup \{e\}) \sqcap (Y \cup \{e\})} + \chi^{(X \cup \{e\}) \diamond (Y \cup \{e\})}$ が成立し，補題 3.9 より，

$$\begin{aligned}
f'(X) + f'(Y) &= f(X \cup \{e\}) + f(Y \cup \{e\}) - 2f(\{e\}) \\
&\geq f((X \cup \{e\}) \vee (Y \cup \{e\})) + f((X \cup \{e\}) \sqcap (Y \cup \{e\})) \\
&\quad + f((X \cup \{e\}) \diamond (Y \cup \{e\})) - 2f(\{e\}) \\
&= f((X \vee' Y) \cup \{e\}) + f((X \sqcap' Y) \cup \{e\}) + f(X \diamond' Y) - 2f(\{e\}) \\
&\geq f'(X \vee' Y) + f(X \sqcap' Y) + f(X \diamond' Y).
\end{aligned}$$

□

**補題 3.12.** $f$ が c-劣モジュラ関数であるとき，greedy vector $x^\pi$ は (P) の実行可能解である．

**証明.** $|E|$ に関する帰納法．

$|E| = 1$ のときは自明．ここで，$\pi' = e_2 \cdots e_n$ として，$f' : \mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e_1\}) \to \mathbb{R}$ を

$$f'(A) = \begin{cases} f(A \cup \{e_1\}) - f(\{e_1\}) & A \cup \{e_1\} \in \mathrm{ex}(\mathcal{L}) \\ f(A) & \text{otherwise} \end{cases}$$

とする．ここで，$e_1$ は $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の atom であり，補題 3.11より $f'$ は c- 劣モジュラ関数である．$x^{\pi'}$ は

$$\sum_{e\in A_i^\pi\setminus\{e_1\}} x^{\pi'}(e) = f'(A_i^\pi \setminus \{e_1\}) \quad (i=2,\ldots,n)$$

の一意解とする．ここで，$A_i^\pi = \mathrm{ex}(\{e_1,\ldots,e_i\})$ であり，任意の $e\in\{e_2,\ldots,e_n\}$ に対して $x^{\pi'}(e)=x^\pi(e)$ であることに注意する．このとき，任意の $X\in\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e_1\})$ に対して，$\sum\{x^{\pi'}(e) : e\in X\}\le f'(X)$ を仮定する．

$|E|=n>1$ のとき，任意の $X\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して次の 3 つの場合を考える．

*Case 1.* $e_1\in X$ のとき．$\sum\{x^\pi(e):e\in X\} = x^\pi(e_1)+\sum\{x^\pi(e):e\in X\setminus\{e_1\}\} = x^\pi(e_1)+\sum\{x^{\pi'}(e): e\in X\setminus\{e_1\}\} \le x^\pi(e_1)+f'(X\setminus\{e_1\}) \le x^\pi(e_1)+f(X)-f(\{e_1\}) = x^\pi(e_1)+f(X)-x^\pi(e_1)=f(X)$.

*Case 2.* $e_1\notin X$ かつ $X\cup\{e_1\}\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき．$X\sqcap\{e_1\}=\emptyset$，$X\diamond\{e_1\}=\emptyset$ であるから，$\sum\{x^\pi(e):e\in X\}=\sum\{x^{\pi'}(e):e\in X\}\le f'(X)=f(X\cup\{e_1\})-f(\{e_1\})\le f(X)-f(X\sqcap\{e_1\})-f(X\diamond\{e_1\})=f(X)$.

*Case 3.* $e_1\notin X$ かつ $X\cup\{e_1\}\notin\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ のとき．$X\in\mathrm{ex}(\mathcal{L}/\{e_1\})$ であるから，$\sum\{x^\pi(e):e\in X\} = \sum\{x^{\pi'}(e):e\in X\}\le f'(X)=f(X)$. □

以上より，定理 1.6の only-if-part は示すことができる．If-part を示すために一つ補題を用意する．

**補題 3.13.** 任意の $c\in\mathbb{R}_+^E$ に対して，ある $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の鎖 $\tilde{\mathcal{C}}:\emptyset\prec A_1\prec A_2\prec\cdots\prec A_m$ および正の実数 $\lambda_i>0$ $(i=1,\ldots,m)$ が一意に存在し，

$$c=\sum_{i=1}^m \lambda_i\chi^{A_i} \tag{22}$$

と $c$ を分解することができる．

**証明.** Greedy chain $\mathcal{C}$ と dual greedy vector $y^\pi$ に対して，$\tilde{\mathcal{C}}=\{A\in\mathcal{C}:y^\pi(A)>0\}$ が上記の鎖になる．以後，一意性を示す．

$E\setminus\{e\}\in\mathcal{L}$ となるすべての $e\in E$ に対して $\mathcal{L}\setminus\{e\}$ で成立すると仮定する．ここで，$Z=\{e\in E:c(e)>0\}$ とする．$\mathrm{ex}(Z)\neq\mathrm{ex}(E)$ のときは仮定より直ちに導かれる．$\mathrm{ex}(Z)=\mathrm{ex}(E)$ のとき，$A_m=\mathrm{ex}(E)$，$\lambda_m=\min\{c(e):e\in\mathrm{ex}(E)\}$ であることがわかり，仮定より一意性が言える． □

**定理 1.6の証明.** Only-if-part は補題3.6，3.7，3.12，3.8より．If-part は，$\chi^X+\chi^Y=\chi^{X\vee Y}+\chi^{X\sqcap Y}+\chi^{X\diamond Y}$ を満たすような任意の $X,Y\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して，命題 2.3 と 命題 2.7より，$X\diamond Y\preceq X\sqcap Y\preceq X\vee Y$ が成り立つので，この 3 つを含むような $\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ の極大鎖 $\mathcal{C}$ が存在する．ここで，補題 3.13 より，$c=\sum\{y(A)\chi^A : A\in\mathcal{C}\}$ と $c$ を分解することができる．(P) の最適解を $x$ とする．ある $\bar{A}\in\mathcal{C}$ に対して，$\sum\{x(e):e\in\bar{A}\}<f(\bar{A})$ とすると，

$$\sum_{e\in E}c(e)x(e)=\sum_{e\in E}\left(\sum_{A\in\mathcal{C}\text{ s.t. }e\in A}y(A)\right)x(e)=\sum_{A\in\mathcal{C}}\left(y(A)\sum_{e\in A}x(e)\right)<\sum_{A\in\mathcal{C}}y(A)f(A)$$

となる．これはアルゴリズム (G) が働くことに矛盾．よって，任意の $A\in\mathcal{C}$ に対して，$\sum\{x(e):e\in A\}=f(A)$ が成立する．ゆえに，$f(X\vee Y)+f(X\sqcap Y)+f(X\diamond Y)=\sum\{x(e):e\in X\vee Y\}+\sum\{x(e):e\in X\sqcap Y\}+\sum\{x(e):e\in X\diamond Y\}=\sum\{x(e):e\in X\}+\sum\{x(e):e\in Y\}\le f(X)+f(Y)$. □

## 4 その他の帰結

この節では，メイン定理に付随して得られる様々な帰結を論じる．

### 4.1 線形計画問題 (P) の totally dual integrality

線形計画問題 (P) の制約不等式系 (3) の totally dual integrality (全双対整数性) について考える．線形計画問題 (P) に対して，$c$ および $f$ は有理ベクトルとする．このとき，問題 (P) の制約不等式系が **totally dual integral** であるとは，任意の整数ベクトル $c$ の式 (22) の表現において，全ての $\lambda_i$ $(i=1,\ldots,m)$ が整数であることである．全双対整数性については例えば [11] を参照せよ．

双対問題 (D) の制約不等式系を greedy chain $\mathcal{C}:\emptyset \prec A_1^\pi \prec A_2^\pi \prec \cdots \prec A_n^\pi$ に制限した部分系の $n\times n$ 次元係数行列を考える．この行列の $(i,j)$ 成分 $a_{i,j}$ は

$$
(23)\quad a_{i,j}=\begin{cases}1 & e_j\in y^\pi(A_i^\pi)\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}
$$

である．補題 3.5 より，この行列は interval matrix [11, pp. 279] である，すなわち，各列に 1 が連続して並んでいることがわかる．Interval matrix は totally unimodular である，すなわち，その任意の小行列式が $0,+1,-1$ のいずれかであることと主定理から，次の定理が導かれる．

**定理 4.1.** $f:\mathrm{ex}(\mathcal{L})\to\mathbb{R}$ が c- 劣モジュラであるとき，線形計画問題 (P) の制約不等式系は totally dual integral である．

### 4.2 c- 劣モジュラ関数に対する Lovász 拡張

Ando [1] が b- 劣モジュラ関数の Lovász 拡張による特徴付けを与えたのと同様に，ここでは c- 劣モジュラ関数の Lovász 拡張による特徴付けを与える．

任意の $c\in\mathbb{R}_+^E$ が式 (22) のように表現されているとき，関数 $f:\mathrm{ex}(\mathcal{L})\to\mathbb{R}$ に対して，

$$
(24)\quad \hat{f}(c)=\sum_{i=1}^{m}\lambda_i f(A_i)
$$

で表される関数 $\hat{f}:\mathbb{R}_+^E\to\mathbb{R}$ を $f$ の **Lovász 拡張** と呼ぶ．Lovász 拡張は Lovász [10] に由来する．$\hat{f}$ は斉正次であることに注意する，すなわち，任意の正実数 $\mu>0$ に対して，$\hat{f}(\mu c)=\mu\hat{f}(c)$ である．

**定理 4.2.** $\mathcal{L}$ を $E$ 上の凸幾何とする．$f:\mathrm{ex}(\mathcal{L})\to\mathbb{R}$ が c- 劣モジュラであるとき，またそのときに限り，式 (24) で定義される Lovász 拡張 $\hat{f}:\mathbb{R}_+^E\to\mathbb{R}$ は凸である．

**証明.** $f$ が c- 劣モジュラであるとすると，定理 1.6より

$$
(25)\quad \hat{f}(c)=\max\left\{\sum_{e\in E}c(e)x(e):\sum_{e\in X}x(e)\le f(X)\quad \text{for all } X\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})\right\}
$$

であるから，直ちに $\hat{f}$ が凸であることがわかる．

逆に，$\hat{f}$ が凸であるとすると，任意の $X,Y\in\mathrm{ex}(\mathcal{L})$ に対して，$\hat{f}(\chi^X)+\hat{f}(\chi^Y)\ge 2\hat{f}((\chi^X+\chi^Y)/2)=\hat{f}(\chi^X+\chi^Y)$ であるから，$X,Y$ が $\chi^X+\chi^Y=\chi^{X\vee Y}+\chi^{X\sqcap Y}+\chi^{X\diamond Y}$ を満たすとき，$f(X)+f(Y)=\hat{f}(\chi^X)+\hat{f}(\chi^Y)\ge\hat{f}(\chi^X+\chi^Y)=\hat{f}(\chi^{X\vee Y}+\chi^{X\sqcap Y}+\chi^{X\diamond Y})=f(X\vee Y)+f(X\sqcap Y)+f(X\diamond Y)$ より，$f$ は c- 劣モジュラである．最後の等式は命題 2.7による． □

### 4.3 半順序集合のシェリングの b- 劣モジュラ関数による特徴付け

Krüger [9] は凸幾何 $\mathcal{L}$ が半順序集合のシェリングであるときに関数 $f:\mathrm{ex}(\mathcal{L})\to\mathbb{R}$ が b- 劣モジュラであることが貪欲算法 (G) が働くための必要十分条件であることを主張している．ここでは，任意の b- 劣モジュラ関数に対してアルゴリズム (G) が働くため必要十分条件が $\mathcal{L}$ が半順序集合のシェリングであることを定理 4.4として証明する．この定理 4.4より先に述べた定理 1.5が導かれる．

**補題 4.3.** $\mathcal{L}$ を $E$ 上の凸幾何で，半順序集合のシェリングではないとする．このとき，$X \diamond Y \neq \emptyset$ を満たすある $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が存在して，$\chi^X + \chi^Y = \chi^{X \vee Y} + \chi^{X \sqcap Y} + \chi^{X \diamond Y}$ を満たす．

**証明.** $\mathcal{L}$ が半順序集合のシェリングではないので，命題 2.8 より，ある $X, Y \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が存在して，$X \diamond Y \neq \emptyset$ である．このような $X, Y$ のうち $|\tau(X \vee Y) \setminus \tau(X)| + |\tau(X \vee Y) \setminus \tau(Y)|$ が最小になるものを $X^*, Y^*$ とする．ここで，$\chi^{X^*} + \chi^{Y^*} > \chi^{X^* \vee Y^*} + \chi^{X^* \sqcap Y^*} + \chi^{X^* \diamond Y^*}$ であるとすると，注意 2.12 より，一般性を失わずに，ある $b \in E$ が存在して，$b \in X^*$，$b \notin \tau(Y^*)$，$b \notin X^* \vee Y^*$，$b \in \tau(X^* \vee Y^*)$ を満たす．ここで，命題 2.9 より，ある $Y' \in \mathrm{ex}(\mathcal{L})$ が存在して，$b \in Y'$ かつ $Y^* \prec Y' \prec X^* \vee Y^*$ を満たす．ゆえに，$X^* \vee Y^* = X^* \vee Y'$．よって，$|\tau(X^* \vee Y^*) \setminus \tau(X^*)| + |\tau(X^* \vee Y^*) \setminus \tau(Y^*)| > |\tau(X^* \vee Y') \setminus \tau(X^*)| + |\tau(X^* \vee Y') \setminus \tau(Y')|$ となり，$X^*, Y^*$ の最小性に矛盾する． □

**定理 4.4.** $\mathcal{L}$ を凸幾何とする．$\mathcal{L}$ が半順序集合のシェリングであるとき，またそのときに限り，アルゴリズム (G) は任意の b- 劣モジュラ関数 $f$ に対して線形計画問題 (D) の最適解を与える．

**証明.** Only-if-part は命題 1.4であるから，if-part を示す．$\mathcal{L}$ が半順序集合のシェリングでないとする．このとき，$f$ として $X = \emptyset$ のとき $f(X) = 0$，それ以外のとき，$f(X) = 1$ を考えると，$f$ は b- 劣モジュラ関数であるが，補題 4.3 より c- 劣モジュラ関数ではない．ゆえに，アルゴリズム (G) はこの $f$ に対しては最適解を与えるとは限らない． □

## 参考文献


[1] K. Ando, The greedy algorithm for a class of lattice polyhedra and its consequences, Discussion Paper No. 830, Institute of Policy and Planning Sciences, University of Tsukuba, 1999.

[2] E. Boyd and U. Faigle, An algorithmic characterization of antimatroids, *Discrete Applied Mathematics* **28**, 1990, 197–205.

[3] P. H. Edelman and R. E. Jamison, The theory of convex geometries, *Geometriae Dedicata* **19**, 1985, 247–270.

[4] J. Edmonds, Submoduar functions, matroids, and certain polyhedra, in : R. Guy, H. Hanani, N. Sauer and J. Schönheim, eds., *Proceedings of the Calgary International Conference on Combinatorial Structures and Their Applications*, Gordon and Breach, New York, 1970, 69–87.

[5] U. Faigle and W. Kern, Submodular linear programs on forests, *Mathematical Programming* **72**, 1996, 195–206.

[6] U. Faigle and W. Kern, On the core of ordered submodular cost games, *Mathematical Programming* **87**, 2000, 467–481.

[7] S. Fujishige, *Submodular Functions and Optimization*, North-Holland, Amsterdam, 1991.

[8] B. Korte, L. Lovász and R. Schrader, *Greedoids*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 1991.

[9] U. Krüger, Structural aspects of ordered polymatroids, *Discrete Applied Mathematics* **99**, 2000, 125–148.

[10] L. Lovász, Submodular functions and convexity, in : A. Bachem, M. Grötschel and B. Korte, eds., *Mathematical Programming – The State of the Art*, Springer, Berlin, 1983, 235–257. J. L. Pfaltz, Closure lattices, *Discrete Mathematics* **154**, 1996, 217–236.

[11] A. Schrijver, *Theory of Linear and Integer Programming*, John Wiley & Sons, Chichester, 1986.